

Construction of the Transverse-Vertical Shapes of the Orthopedic Boot-Tree by Means of the Solution to Singular Dirichlet Boundary Value Problem

Merab Shalamberidze*, Zaza Sokhadze**, Malvina Tatvidze§

*Department of Design and Technology, Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia

**Department of Mathematics, Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia

§ Department of Chemical Technology, Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia

(Presented by Academy Member Guram Gabrichidze)

ABSTRACT. The paper describes the problem of approximate construction of the transverse-vertical shapes of the orthopedic boot-tree. In the footwear industry, great attention is paid to the design of boot-trees. The task is much harder, when we deal with the design and production of the orthopedic boot-tree. It is well-known that from a geometrical standpoint, the boot-tree has a complex shape, and its description by using methods of mathematical research is a fairly long and arduous process. To solve the mentioned problem, that is, to provide approximate construction of the transverse-vertical shapes of the orthopedic boot-tree, the authors of this paper used the integral curves of the solutions to singular Dirichlet boundary value problem. Coupling and connection of the sections of the mentioned curves allow us to construct not only the approximate sections of the transverse-vertical shapes, but also to change the shapes of the transverse-vertical sections of boot-trees in unlimited numbers and with high degree of accuracy transfer one size of the boot-tree to another size. The latter is particularly relevant in the design and production of orthopedic footwear.

© 2018 Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.

Key words: orthopedic boot-tree, Dirichlet boundary value problem

For system description of transverse-vertical sections of boot-tree, technologists use different types of functional relationships [1-4]. To describe the surface of boot-tree, it is advisable to select those functions, whose graphs of solution describe the surface of boot-tree with a high degree of accuracy, particularly transverse-vertical sections. Industry experts address this issue by quadratic polynomial approximation, particularly by using the least squares method. For that it is required to determine the dependence of coefficients a , b and c towards $a(s)$, $b(s)$ and $c(s)$ for a parabola, where s is length of the center line of bootprint, that is, the same numbers of transverse-vertical sections. By use of the same method, a profile of transverse-vertical sections of boot-tree for the ellipsoidal functions is obtained. This method is characterized by high degree of accuracy, and in the production of boot-tree it becomes necessary to construct sections in rough way, which eventually is associated with certain inaccuracies.

The goal of our paper is to obtain the desired shapes of transverse-vertical sections of boot-tree for a deformed or partially amputated foot. To do so, it is not sufficient to use the simple functional relationships. We consider the different types of differential equations, whose solutions represent the different classes of functions, such as: cuspidal, ellipsoidal, logarithmic, exponential, trigonometric and other functions. The variety of the obtained solutions should allow us for selecting the desirable shape of orthopedic boot-tree for a deformed and pathological foot. The novelty of research also consists in the fact that by setting initial or boundary condition for differential equations we obtain the solution to Cauchy problem (integral curves), which corresponds to the number of transverse-vertical sections of boot-tree with a desirable shape.

A significant novelty of the research consists in obtaining the approximate shapes of transverse-vertical sections of the orthopedic boot-tree by means of the lines of the solution to singular Dirichlet boundary value problem.

We consider singular Dirichlet boundary value problem:

$$u''(t) + \frac{a}{t}u'(t) - \frac{a}{t^2}u(t) = f(t, u(t), u'(t)) \quad (1)$$

$$u(t) = 0, u(T) = 0 \quad (2)$$

Where $a \in (-\infty; 1)$, f satisfies the Caratheodory's local condition $[0, T] \times D$ potency, $D = (0, \infty \times R)$.

The work [5] of I. Rakunkova, A. Spielaurer, S. Stanek and E. B. Weinmuler dwells on the issue of the existence of the solution to (1) - (2) problem. Also, the lemma 3.1, clearly shows the solution to (1) - (2), particularly:

$$u(t) = C_1 t + C_2 t^{(-a)} + t \int_t^T S^{(-a-2)} \left(\int_s^T \xi^{(a+1)} f(t, u(\xi), u'(\xi)) d\xi \right) d\xi \quad (3)$$

Where $C_1, C_2 \in R$ $t \in [0, T]$ in (3) $C_1 t + C_2 t^{-a}$ is the solution of Euler equation.

$$u'' + \frac{a}{t}u'(t) - \frac{a}{t^2}u(t) = 0. \quad (4)$$

The solution, which we are seeking is in the form of $u(t) = t^\lambda$, then $u' = \lambda t^{(\lambda-1)}$ $u'' = \lambda(\lambda-1)t^{(\lambda-2)}$ if we introduce these equalities in (4), we shall obtain:

$$t^{(\lambda-2)} (\lambda(\lambda-1) + a\lambda - a) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(a-1) - a = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -a.$$

A general solution to the equation of Euler will be written as follows:

$$u(t) = C_1 t^{\lambda_1} + C_2 t^{\lambda_2} = C_1 t + C_2 t^{-a}.$$

Our aim is to construct the line integrals by using formula (3) for the different cases of a $f(t, u(t), u'(t))$ represented in the right side of the equation (1), as well as for various values of a, which will allow us to obtain the desirable shapes of the front part of shoe.

Example 1:

$$u'' - \frac{2}{t}u' - \frac{2}{t^2}u = t,$$

$$u(1) = 0 \quad u'(1) = C,$$

i.e. $f(t, u(t), u'(t)) = t, a = -2, t \in [0, 1]$.

Due to the loading of (3), we obtain:

$$u(t) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\int_t^1 \left(\int_t^1 \xi^{-1} \xi d\xi \right) dS \right) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\int_t^1 (1-S) dS \right) = t \left(1 - \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} \right) + C_1 t + \frac{C_2}{t^2},$$

i.e.

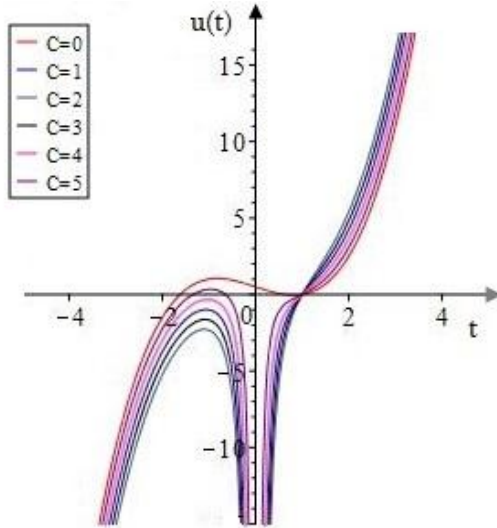


Fig. 1. The curves of the solutions of example 1.

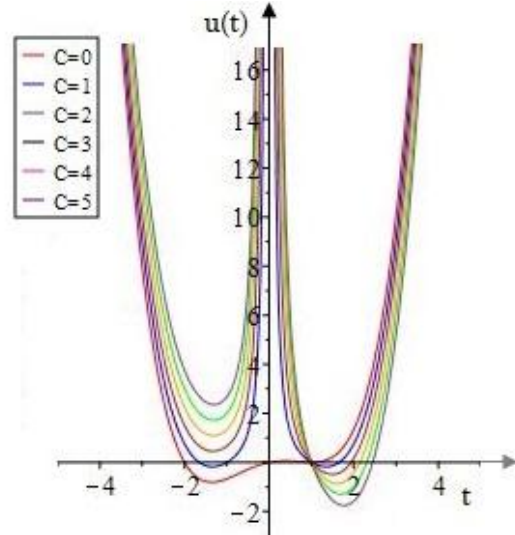


Fig. 2. The curves of the solutions of example 2.

$$u(t) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + \frac{t^3}{2} + t^2 + \frac{t}{2},$$

$$u'(t) = C_1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} t^2 + 2t - 2C_2 \frac{1}{t^3}.$$

With provision for initial conditions, we obtain

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$

$$C_1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 - 2C_2 = 0,$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases}$$

$C_1 = \frac{1}{3} C$ $C_2 = -\frac{1}{3} C$, then, the solution to the considered problem takes the following form

$$u(t) = \frac{t^3}{2} - \frac{1}{3} C t^{-2} - \left(1 - \frac{1}{3} C \right) t + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Its diagram is shown in Fig. 1.

Example 2:

$$u'' + \frac{a}{t} u' - \frac{a}{t^2} u = t^2,$$

$$u(1) = 0 \quad u'(1) = C.$$

i.e. $f(t, u(t), u'(t)) = t$, $a = -2$, $t \in [0, 1]$.

Due to the loading of (3), we have

$$\begin{aligned}
 u(t) &= C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\int_t^1 \left(\int_t^1 \xi^{-1} \xi^2 d\xi \right) \right) ds = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\int_t^1 \frac{S^2}{2} \Big|_t^1 dS \right) = \\
 &= C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\int_t^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{S^2}{2} \right) dS \right) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} \right) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + \frac{2}{3} t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2}.
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + \frac{2}{3} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}, \\
 u'(t) &= C_1 + \frac{2}{3} - \frac{2C_2}{t^3} - t + \frac{2}{3} t^3.
 \end{aligned}$$

With provision for initial conditions, we obtain

$$\begin{cases} C_1 - 2C_2 = C - \frac{1}{3}C_2 = \frac{1}{3}C \\ C_1 + C_2 = -\frac{1}{3}C_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}C. \end{cases}$$

Then, the solution to the considered problem takes the following form:

$$u(t) = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}C \right) t + \frac{1}{3} C \frac{1}{t^2} + \frac{2}{3} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}. \quad (6)$$

Its diagram is shown in Fig. 2.

Thus, by means of the integral curves of the solution to singular Dirichlet boundary value problem, it is possible to describe the transverse-vertical shapes of the orthopedic boot-tree in high degree of accuracy. Also, it allows changing the transverse-vertical shapes of boot-tree in unlimited numbers, during the transfer from one size to another size. The latter is particularly relevant in the production of orthopedic footwear, when we are dealing with patients having a deformed and pathological foot.

Acknowledgement. The work was fulfilled with the financial support of Shota Rustaveli National Science Foundation, Grant FR № 217386.

მეცნიერება

ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტის განივ- ჰორიზონტალური კვეთების მიახლოებითი ფორმების აგება დირიხლეს სინგულარული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის საშუალებით

მ. შალამბერიძე*, ზ. სოხაძე**, მ. თათვიძე§

*აკაკი წერეთლის სახ. სახელმწიფო უნივერსიტეტი, დიზაინისა და ტექნოლოგიის დეპარტამენტი, ქუთაისი, საქართველო

**აკაკი წერეთლის სახ. სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი, ქუთაისი, საქართველო

§აკაკი წერეთლის სახ. სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ქიმიური ტექნოლოგიის დეპარტამენტი, ქუთაისი, საქართველო

(წარმოდგენილია აკადემიის წევრის გ. გაბრიჩიძის მიერ)

სტატიის განხილულია ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტების განივ-ვერტიკალური კვეთების ფორმების მიახლოებითი აგების პრობლემა. ფეხსაცმლის მრეწველობაში ძალიან დიდი ყურადღება ეთმობა კალაპოტების პროექტირების საკითხს. ამოცანა გაცილებით რთულია, როდესაც საქმე გვაქვს ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტის პროექტირებასა და წარმოებასთან. ცნობილია, რომ ფეხსაცმლის კალაპოტი გეომეტრიული თვალსაზრისით არის რთული ფორმის და მისი აღწერა მათემატიკური კვლევის მეთოდების გამოყენებით წარმოადგენს საკმაოდ ხანგრძლივ და შრომატევად პროცესს. სტატიის ავტორთა ჯგუფის მიერ აღნიშნული პრობლემის გადაწყვეტის, ანუ ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტის განივ-ვერტიკალური კვეთების ფორმების მიახლოებითი აგებისათვის გამოყენებულია დირიხლეს სინგულარული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნების ინტეგრალური წირები. აღნიშნული წირების მონაკვეთების შეუღლებითა და გადაბმით სრულიად შესაძლებელია ავაგოთ ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტის განივ-ვერტიკალური კვეთების მიახლოებითი ფორმები. აღნიშნული წირების შეუღლება და გადაბმა საშუალებას მოგვცემს ავაგოთ არა მარტო განივ-ვერტიკალური ფორმების მიახლოებითი კვეთები, არამედ ის იძლევა შესაძლებლობას კალაპოტის ერთი ზომიდან მეორე ზომაზე გადასვლის დროს, განუსაზღვრელი რაოდენობით და დიდი სიზუსტით ვცვალოთ კალაპოტების განივ-ვერტიკალური კვეთების ფორმები. ეს უკანასკნელი განსაკუთრებით აქტუალურია ორთოპედიული ფეხსაცმლის კალაპოტების პროექტირებისა და წარმოების პროცესში.

REFERENCES

1. Fukin V.A. (1980) Radiusograficheskii metod konstruirovania vnutrennei formy obuvi. 58 p. M. Legkaya industriya (in Russian).
2. Fukin V.A., Kostyleva V.V., Lyba V.P. (1987) Proektirovanie obuvnykh kolodok. 268 p. M. Legprombytizdat. (in Russian).
3. Fukin V.A. (2000) Teoreticheskie osnovy proektirovaniia vnutrennei formy obuvi. 2-izdanie per. i dop. 318 p. M. MGUDT (in Russian).
4. Kiselev S.Yu. (2004) Avtomatizirovannoe proektirovanie i izgotovlenie tekhnologicheskoi osnastki dlia proizvodstva obuvi i protezno-ortopedicheskikh izdelii. Doct. Thesis. 392 p. (in Russian).
5. Rachunkova I., Spielauer A., Stanek S. Weinmuler E. B. (2013) The structure of a set of positive solutions to Dirichlet BVPs with time and space singularities. *Georgian Mathematical Journal*, 1: 95-127.

Received December, 2017