საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე, 175, №1, 2007
BULLETIN OF THE GEORGIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, 175, №1, 2007

Mathematics

«*In principio erat* Muskhelishvili»

Herbert A. Mang

Vienna University of Technology; Institute for Mechanics of Materials and Structures; Vienna, Austria

ABSTRACT. In the beginning (of the author's scientific career) there was (Prof. Nikoloz Ivanesdze) Muskhelishvili. His method, based on the theory of complex variables, enabled the author to solve the problem of a simply supported trapezium-shaped plate with right angles subjected to a uniformly distributed static load. An essential feature of the solution of this problem, in the framework of a doctoral dissertation, was conformal mapping of the unit circle onto a trapezium with right angles representing a quarter of a regular hexagon. The purpose of the brief description of this work, written by a scientific novice approximately fourty years ago, is to pay late tribute to the great Georgian scientist Muskhelishvili.

Key words: *Nikoloz Muskhelishvili.*

1. Introduction

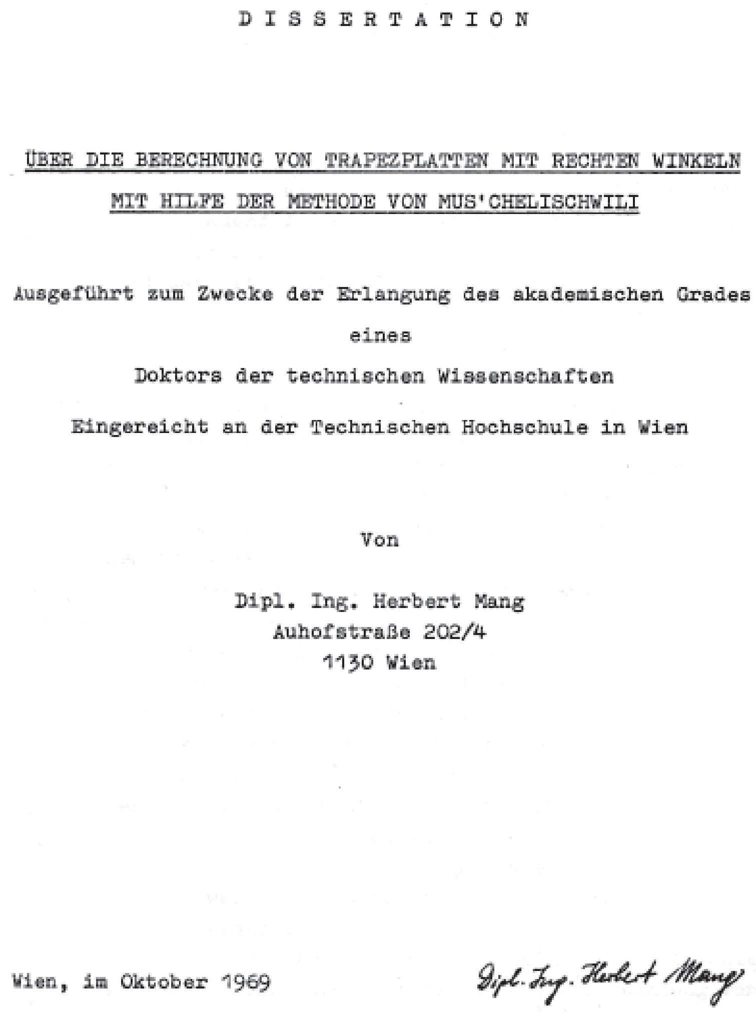
At the end of October 1969, I submitted my doctoral dissertation "On the Analysis of Trapezium-shaped Plates with Right Angles by Means of Muskhelishvili's Method" [1] to Vienna University of Technology (TUW) (Fig. 1).

This topic was proposed by the Head of the Institute for Strength of Materials at the Department of Civil Engineering of TUW, Prof. Walter Mudrak. It was motivated by consulting work consisting of the analysis of deformations and stresses of an elastic plate of the aforementioned shape, subjected to a uniformly distributed static load. Such plates can be found, e.g., as load-carrying components of structures at skew intersections of two roads (Fig. 2).

The method of solution of the problem was left open. A senior colleague suggested Muskhelishvili's method to me. With the help of conformal mapping of the unit circle onto the trapezium this method would allow reducing the solution to the one for a circular plate.

At that time, approximately fourty years ago, I knew little about the famous Georgian scientist Prof. Nikoloz Ivanesdze Muskhelishvili (Fig. 3), let alone his *opus magnum* "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" [2]. Soon, however, this fundamental work became scientific gospel to me. The recollection of this time prompted me to modify the initial sentence in the prologue of St. John's gospel to *"In principio erat* Muskhelishvili" for use as the title of this article. Indeed, in the beginning of my scientific career there was Muskhelishvili whose " *verba mathematica"* I was studying with great enthusiasm.

I consider the honorable invitation by the President of the Georgian Academy of Sciences, Prof. Tamaz Gamkrelidze, to write a paper on my early experience with Muskhelishvili's method as a lucky coincidence allowing me to pay late tribute to the great Georgian Academician Muskhelishvili by means of my earliest scientific work.



D I S S E R T A T I O N

ÜBER DIE BERECHNUNG VON TRAPEZPLATTEN MIT RECHTEN WINKELN
MIT HILFE DER METHODE VON MUS'CHELISCHWILI

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines
Doktors der technischen Wissenschaften
Eingereicht an der Technischen Hochschule in Wien

Von

Dipl. Ing. Herbert Mang
Auhofstraße 202/4
1130 Wien

Wien, im Oktober 1969 Dipl. Ing. Herbert Mang

Fig. 1. Title page of the author's Viennese dissertation.

2. Nikoloz Ivanesdze Muskhelishvili from the point of view of a doctoral student in the late 1960s

As a doctoral student my interest in biographical details of scientists was relatively small. All I knew about Prof. Muskhelishvili was that he published the aforementioned book and also wrote a monography on "Singular Integral Equations" [3]. I did not know e.g. that he was a student of physics and mathematics and a postgraduate, respectively, of St. Petersburg University, where, in 1934, he obtained the degree of Dr. of Physical and Mathematical Sciences. With increasing age, my interest in N. I. Muskhelishvili's biography has grown. What I have always admired, is his tenure of office as Professor at Tbilisi State University from 1922 until his death in 1976, as Director of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Georgian SSR from 1941 until his death, and, last but not least, as President of the Academy from 1941-1972.

To indulge in further details of the biography of the great Georgian scientist Muskhelishvili in the Bulletin of the Georgian Academy of Sciences would be carrying coals to Newcastle. Georgian readers, however, may rest assured that Prof. Muskhelishvili's membership in several foreign scientific academies of high reputation, the host of important prizes and awards bestowed on him, and his extensive public activities are just as impressive from my point of view as former Secretary General and President of the Austrian Academy of Sciences who had to do with many biographies of researchers, as from the vantage point of compatriotic scientists.

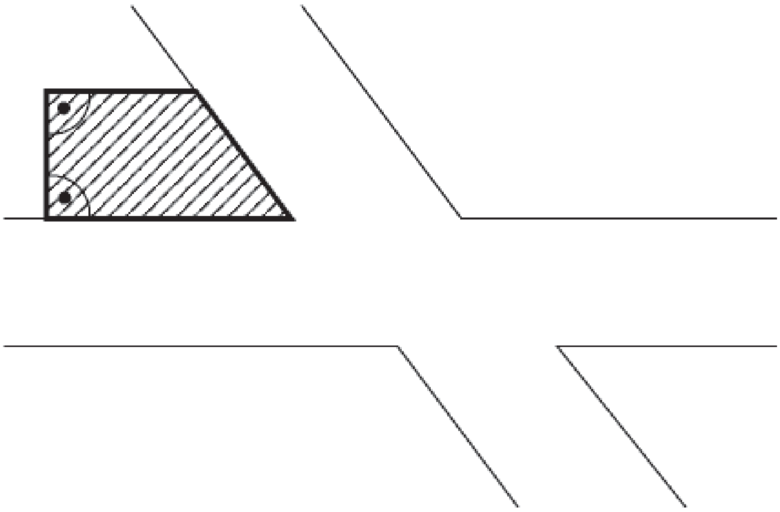


Fig. 2. Trapezium-shaped plate with right angles in a structure at a skew intersection of two roads.

At the time of my doctoral studies at TUW, Muskhelishvili's method was the only promising analytical tool for determination of displacements and stresses of a trapezium-shaped plate with right angles. Twenty five years later, in a handbook chapter on plates and shells [4] serving as lecture notes at TUW, Muskhelishvili's method was employed for the solution of the most difficult plate problems in a hierarchy of increasing level of such problems.

When I was writing my Viennese doctoral dissertation, the Finite Element Method (FEM) was yet not taught at Austrian universities. Soon after graduation to Dr.techn. I realized the necessity to study this powerful computer-oriented method which revolutionized, among other things, structural analysis. Thirty three years after completion of Ph.D. studies in the USA with a dissertation on the analysis of doubly corrugated shells by the FEM [5], I daresay that the impressive versatility and great efficiency of this numerical method which has dominated my scientific career is largely compensated by the mathematical beauty of Muskhelishvili's analytical method.

Fig. 3. Prof. Nikoloz Ivanesdze Muskhelishvili (16.2.1891-16.7.1976)

3. Analysis of elastic plates by means of Muskhelishvili's method

3.1. Formulation of the boundary value problem. The general solution of the inhomogeneous bipotential equation, describing the deflections of an elastic plate, can be written as [2]

$$w = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] + w_p \,, \tag{1}$$

where Re[ ] is the real part of the complex function in brackets, φ and χ denote two analytic functions of the complex variable $z = x + i\,y$ with $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ stands for the conjugate complex variable, and w_p symbolizes a particular solution of the inhomogeneous bipotential equation. For

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}\,\chi(0) = 0 \,, \tag{2}$$

where $\mathrm{Im}\,\chi\,(0)$ is the imaginary part of $\varphi\,(0)$, a rigid body motion of the plate is impossible, resulting in a unique solution [1].

For the special case of a uniformly distributed load p, w_p is given as [2]

$$w_p = \frac{p(z\bar{z})^2}{64K} \quad \text{with} \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3}$$

as the stiffness of the plate, where Young's modulus E, Poisson's ratio ν, and the thickness h are constant quantities.

For the special case of simply supported plates with straight boundaries, the Navier boundary conditions hold:

$$w = 0 \,, \quad \Delta w = 0 \tag{4}$$

with Δ denoting the Laplace operator.

Substituting $z = z_R$, where the subscript R stands for "boundary", into (1) and (3) and inserting the obtained relations into (4), yields

$$\frac{p(z_R\,\bar{z}_R)^2}{64K} = -\frac{1}{2}\left[\bar{z}_R\,\varphi(\bar{z}_R) + z_R\overline{\varphi(z_R)} + \chi(z_R) + \overline{\chi(z_R)}\right], \tag{5a}$$

$$\frac{p(z_R\,\bar{z}_R)}{4K} = -2\left[\varphi'(z_R) + \overline{\varphi'(z_R)}\right]. \tag{5b}$$

Note that (5b) does not depend on $\chi\,(z_R)$.

3.2. Solution of the boundary value problem for circular plates. Expansion of the analytic functions $\varphi\,(z)$ and $\chi\,(z)$ as power series yields [2]

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad \text{and} \quad \chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k \,. \tag{6}$$

Expansion of the right-hand side of (3) as a Fourier series for $z = z_R$ gives

$$w_p(z_R) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta} \quad , \tag{7}$$

where A_k are the known Fourier coefficients and ϑ is the polar angle. With

$$z_R = Re^{i\vartheta} = R\sigma \quad \text{and} \quad \bar{z}_R = Re^{-i\vartheta} = R\sigma^{-1} \tag{8}$$

the boundary conditions (5a) and (5b) become

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k = -\frac{1}{2}\left(R\sigma^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k R_k \sigma^{-k} + R\sigma\sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k R_k \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a'_k R_k \sigma^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k R_k \sigma^{-k} \right) \quad , \tag{9a}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \sigma^k = -2\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k R^{k-1} \sigma^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k\, k R^{k-1} \sigma^{-(k-1)} \right) \quad , \tag{9b}$$

where the left-hand side of (9b) represents a Fourier series expansion of $\Delta w_p(z_R)$ with B_k as known Fourier coefficients. The unknown coefficients a_k, $\bar{a}_k$, a'_k and $\bar{a}'_k$ are obtained by means of comparison of coefficients.

Because of the curved boundary, the boundary condition (4.2) yields

$$m_n(z_R) = -\frac{K}{R}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial R} \neq 0 \; , \tag{10}$$

where $m_n(z_R)$ is the bending moment normal to the boundary.

3.3. Solution of the boundary value problem by means of conformal mapping of the unit circle onto the desired domain. With the help of the function

$$z = \omega(\zeta) \; , \tag{11}$$

mapping the unit circle $|\zeta| < 1$ conformally onto the interior of the domain representing the desired shape of the plate, the boundary value problem can be solved analogous to the one for circular plates. Expressing $\varphi(z)$ and $\chi(z)$ by means of (11) as

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta) \quad \text{and} \quad \chi(z) = \chi(\omega(\zeta)) = \chi_1(\zeta) \tag{12}$$

and specializing (8) for the boundary of the unit circle ($R = 1$, $z_R = \zeta_R$) to obtain $\zeta_R = \sigma$, the boundary conditions (5a) and (5b) can be rewritten as [2]

$$\frac{p\left[\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}\right]^2}{64K} = -\frac{1}{2}\left[\overline{\omega(\sigma)}\varphi_1(\sigma) + \omega(\sigma)\overline{\varphi_1(\sigma)} + \chi_1(\sigma) + \overline{\chi_1(\sigma)}\right], \tag{13a}$$

$$\frac{p\,\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{4K} = -2\left[\frac{\varphi'_1(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\varphi'_1(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right] , \tag{13b}$$

where

$$\frac{d\varphi_1}{d\zeta} = \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\omega}{d\zeta} \; . \tag{14}$$

Since the mapping function is a regular function, it can be expanded, within its convergence circle, as a power series:

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k . \tag{15}$$

Assuming that this series converges for $\zeta_R = \sigma$,

$$\omega(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sigma^k . \tag{16}$$

The solution of the boundary value problem is similar to the one for circular plates. Details of this solution are given in [2]. Its result are the coefficients a_k, $\overline{a}_k$, a'_k and $\overline{a}'_k$ of the power series

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \overline{\varphi_1(\zeta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k \zeta^k, \quad \chi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k \zeta^k, \quad \overline{\chi_1(\zeta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}'_k \zeta^k, \tag{17}$$

which differ from the ones in (9b).

4. Example. Trapezium-shaped plate with right angles

4.1. Choice of special geometric shape. The geometric shape of the plate is chosen as a quarter of a regular hexagon (Fig. 4). Hence, the proportion of the side lengths is $a : b : c : d = 1:1:1/2:\sqrt{3}/2$.

The reason for this choice is that the trapezium-shaped plate concerned may be viewed as the "most characteristic" representative of this class of plates. "Less characteristic" representatives are shown in Fig. 5.

For $c/a > 1/4$, Bareš suggested to replace the trapezium-shaped plate by a rectangular plate with the side lengths

$$a_r = \frac{2}{3}(2c + a)\frac{a}{a + c}, \quad b_r = d - \frac{a(a - c)}{6(a + c)}. \tag{18}$$

If, by comparison of results for $c/a = 1/2$, this suggestion should prove to be useful, the more this would be the case for $c/a > 1/2$.

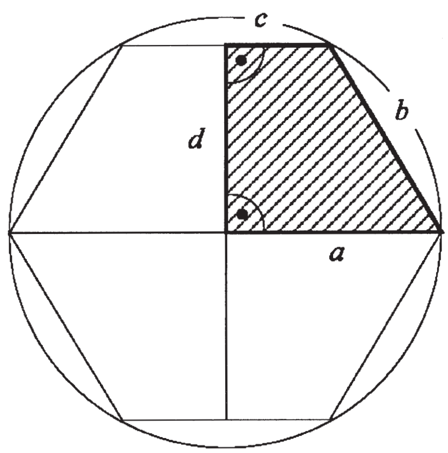


Fig. 4. Trapezium with right angles as a quarter of a regular. hexagon

4.2. Conformal mapping of the unit circle onto the chosen trapezium with right angles. At first, the unit circle is mapped conformally onto a quarter circle with the same radius (Fig. 6). The mapping function is obtained as [2, 7]

$$\rho = \left(\frac{1 + i\zeta - \sqrt{2}\sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + \zeta} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{19}$$

With the help of the reflection principle by Schwarz [7], the quarter circle is then mapped conformally onto the chosen trapezium (Fig. 7). According to this principle, the mapping function is the same as the one for conformal mapping of the unit circle onto a rectangular hexagon, obtained as [2, 8]

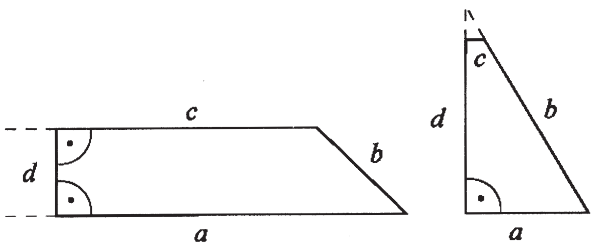


Fig. 5. Trapezium-shaped plates with right angles that can be analyzed as (a) a plate half-strip with a skew transverse side and (b) a right-angled triangular plate.

$$\frac{dz}{d\rho} = A(1 - \rho^6)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{with} \quad A = 0.8986 . \tag{20}$$

The right-hand sides of (19) and (20) are expanded as power series. Substitution of the power series for $\rho(\xi)$ into the one for $z(\rho)$, obtained by termwise integration of the power series for $dz/d\rho$, yields

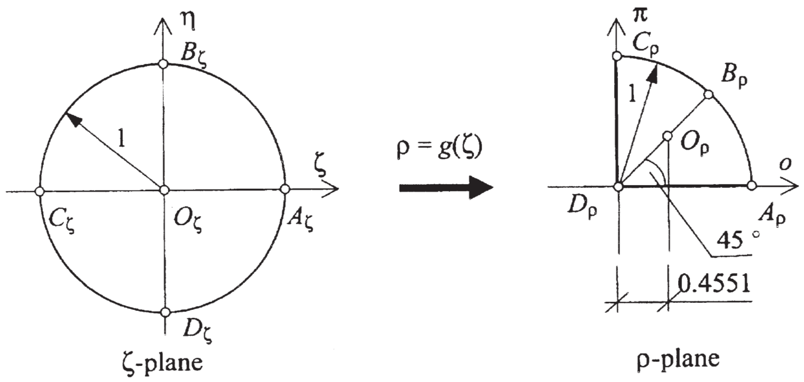


Fig. 6. Conformal mapping of the unit circle onto a quarter circle with the same radius.

$$z = \omega(\zeta) = A\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \zeta^k. \tag{21}$$

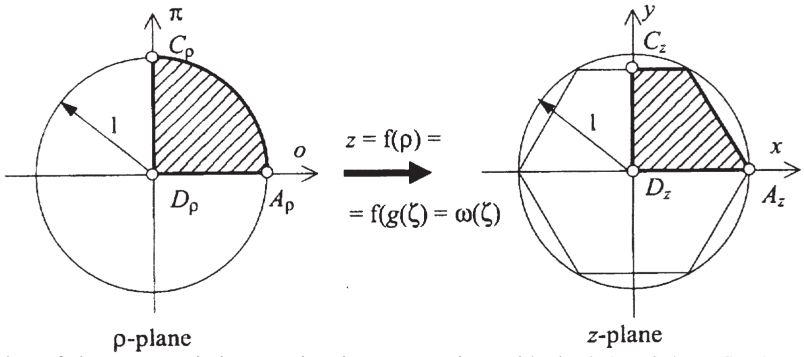


Fig. 7. Conformal mapping of the quarter circle onto the chosen trapezium with the help of the reflection principle by Schwarz.

Figure 8 illustrates corresponding points of the unit circle and of an approximation of its conformal mapping onto the chosen trapezium obtained by truncation of the power series in (21) after the term $\gamma_{17}\,\zeta^{17}$. In [2], this approximation was improved by an estimation of the residue. From the viewpoint of engineering design, however, such an improvement is not necessary.

Because of the truncation of (21), the actual boundary of the conformal mapping of the unit circle, as opposed to the desired boundary, is curved. Hence, satisfaction of the boundary condition $\Delta w = 0$ (4) results in violation of the

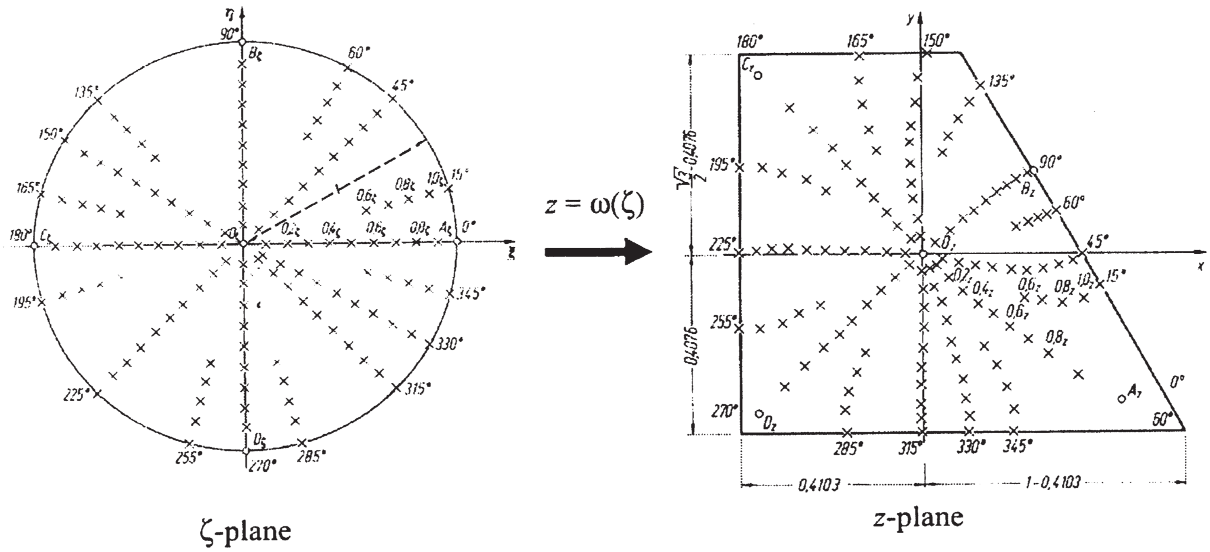


Fig. 8. Corresponding points of the unit circle and its conformal mapping onto an approximation of the chosen trapezium.

boundary condition $m_n = 0$, analogous to $m_n\ (z_R) = 0$ (10) for a circular plate. If, instead of $\Delta w = 0$, $m_n = 0$ had been chosen as boundary condition, its satisfaction for the actual boundary would not necessarily have been better than satisfaction of $\Delta w = 0$ for this boundary.

4.3. Selected distributions of displacements for the chosen trapezium-shaped plate. Fig. 9 shows plots of the dimensionless term $(8K/p\,\ell^4_{DA})\ w$, where the so far undefined quantity ℓ_{DA} denotes the length of the longer one of the two parallel sides of the trapezium-shaped plate. The mapping of a specific diameter of the unit circle is defined by the angle ϑ (Fig. 8). Because of the truncation of the infinite series (21), the range of validity of the curves in Fig. 9 is restricted to their center parts shown as full lines.

For $\nu = 0.3$, the results for the decisive bending moments m_x and m_y obtained by means of approximate analysis of the trapezium-shaped plate as a rectangular plate with side lengths a_r and b_r according to (18) are on the safe side [2]. Nevertheless, since the difference is only 8.9 % and 12.3 %, respectively, the approximate analysis is not uneconomical.

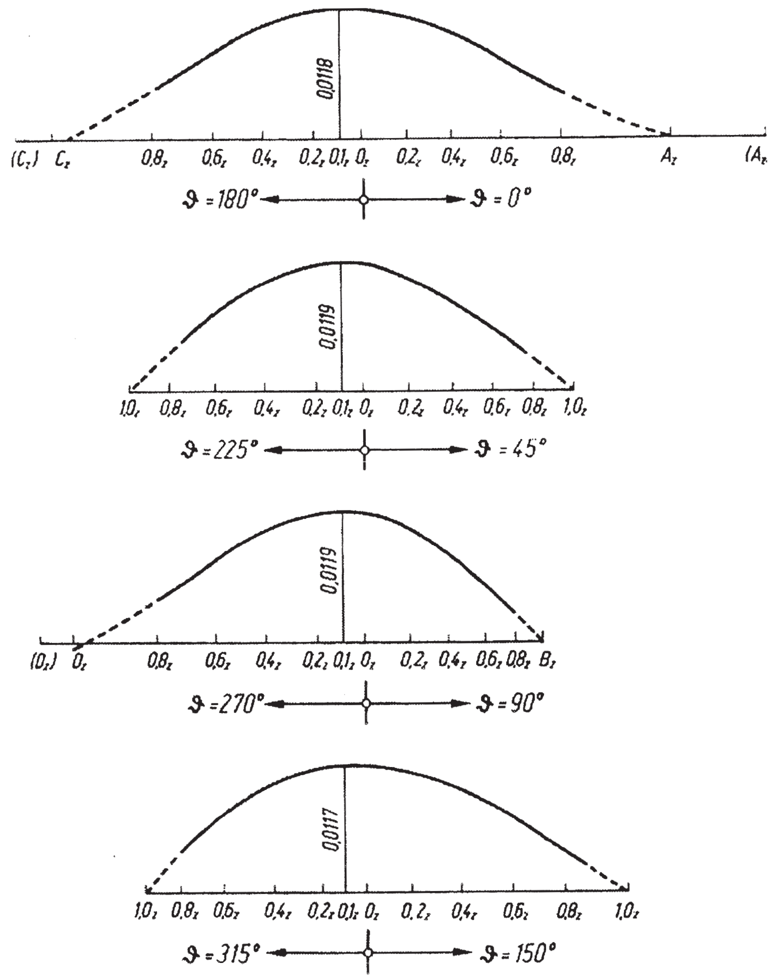


Fig. 9. Selected distributions of $(8K/p\,\ell^4_{DA})w$ for the chosen trapezium-shaped plate.

5. Conclusions

In principio erat Muskhelishvili. In the beginning of my scientific career, in the late sixties of the past century, there was the scientific icon Prof. Nikoloz Ivanesdze Muskhelishvili. The mathematical and mechanical brilliance of his great works has fascinated me ever since. My intensive preoccupation with Computational Mechanics, in general, and with the FEM, in particular, has had no influence on my reverence for the great Georgian mathematical analyst Muskhelishvili, to whom I wanted to pay late tribute by this paper.

Looking back at fourty years of scientific work in the area of Solid Mechanics, a remark by John F. Kennedy at the award of an honorary doctorate from Yale University came to my mind: “I have the best of both worlds, a Harvard education and a Yale degree.” Let me conclude these autobiographical reflections by claiming that also I, though in a somewhat different manner, have the best of two worlds, of the Old and the New World: an Austrian Dr.techn. dissertation based on fundamental work by the Georgian scientist Muskhelishvili and an American Ph.D. thesis wherein the FEM was used.

Acknowledgements. The logistic support by Prof. J. Eberhardsteiner and the technical assistance by Mr. H.W. Müllner and Ms. A. Schuh in preparing this manuscript are thankfully acknowledged.

მათემატიკა

«*In principio erat* მუსხელიშვილი»

ჰერბერტ ა. მანგი

ვენის ტექნოლოგიური უნივერსიტეტი; მასალათა და სტრუქტურების მექანიკის ინსტიტუტი, ვენა, ავსტრია

ავტორის სამეცნიერო კარიერა მუსხელიშვილის სახელთან დასაწყისიდანვეა დაკავშირებული. ნიკოლოზ მუსხელიშვილის მეთოდმა, რომელიც კომპლექსური ცვლადის თეორიას ეფუძნება, ავტორს საშუალება მისცა გადაეწყვიტა თავისუფლად დაყრდნობილი სწორკუთხა ტრაპეციის ფორმის ფირფიტის ამოცანა თანაბრად განაწილებული სტატიკური დატვირთვის პირობებში. ავტორის სადოქტორო დისერტაციაში ამ ამოცანის ამოხსნის ძირითადი არსი მდგომარეობს ერთეულოვანი წრის კონფორმულ ასახვაში სწორკუთხა ტრაპეციაზე, რომელიც წარმოადგენს წესიერი ჰექსაგონის მეოთხედს.

წინამდებარე სტატიით, რომელიც თითქმის ორმოცი წლის წინ ავტორის სამეცნიერო კარიერის დასაწყისში შექმნილი შრომის შემოკლებულ ვარიანტს წარმოადგენს, იგი დაგვიანებულ პატივს მიაგებს დიდ ქართველ მეცნიერს ნიკოლოზ ივანეს ძე მუსხელიშვილს.

შესავალი. 1969 წლის ოქტომბრის ბოლოს ვენის ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში წარვადგინე ჩემი სადოქტორო დისერტაცია „სწორკუთხოვანი ტრაპეციის ფორმის ფირფიტების ანალიზი მუსხელიშვილის მეთოდით“. ეს თემა შემოთავაზებული იყო ვენის უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობის ინსტიტუტის ხელმძღვანელის, პროფ. ვალტერ მუდრაკის მიერ. ეს აზრი ნაკარნახევი იყო შრომით, რომელიც ეხებოდა ზემოთ აღნიშნული ფორმის დრეკადი ფირფიტების დეფორმაციებისა და დაძაბულობების ანალიზს თანაბრად განაწილებული სტატიკური დატვირთვის პირობებში. მსგავსი ფირფიტები შეიძლება განვიხილოთ როგორც სტრუქტურის შემადგენელი დატვირთული ნაწილები ორი გზის ირიბი ურთიერთკვეთისას (სურ. 2).

იმ დროს არ გვქონდა ასეთი ამოცანების ამოხსნის ჩამოყალიბებული მეთოდი. უფროსმა კოლეგამ მირჩია მუსხელიშვილის მეთოდი გამომეყენებინა. თუ ვისარგებლებთ ტრაპეციაზე ერთეულოვანი წრის კონფორმული ასახვით, ეს მეთოდი საშუალებას მოგვცემს ტრაპეციის ფორმის ფირფიტის ამოცანის ამონახსნი დავიყვანოთ წრიული ფირფიტის ამოცანის ამონახსნზე.

მაშინ, დაახლოებით ორმოცი წლის წინ, ძალიან ცოტა რამ ვიცოდი გამოჩენილი ქართველი მეცნიერის პროფ. ნიკოლოზ ივანეს ძე მუსხელიშვილის შესახებ გარდა მისი შრომისა „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“. მალე, ეს ფუნდამენტური ნაშრომი ჩემთვის მეცნიერულ სახარებად იქცა. მოგონებამ იმ დროზე მიბიძგა ამ სტატიის სათაურად იოანეს სახარების სახეცვლილი საწყისი ფრაზა გამომეყენებინა: „პირველითგან იყო მუსხელიშვილი“ (“In principio erat Muskhelishvili”). რასაკვირველია, ჩემი სამეცნიერო კარიერის დასაწყისი დაუკავშირდა მუსხელიშვილს, რომლის “verba mathematica”-ს დიდი ენთუზიაზმით ვსწავლობდი.

საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტის, პროფ. თამაზ გამყრელიძის დიდსულოვან შემოთავაზებას, დამეწერა სტატია მუსხელიშვილის მეთოდით მუშაობის ადრინდელი გამოცდილებიდან, მე ვთვლი როგორც ბედნიერ შესაძლებლობას ჩემი ადრინდელი სამეცნიერო ნაშრომით დაგვიანებული ხარკი გადავუხადო დიდ ქართველ მეცნიერს — აკადემიკოს მუსხელიშვილს.

დოქტორანტის თვალით დანახული ნიკოლოზ ივანეს ძე მუსხელიშვილი 1960-იან წლებში. დოქტორანტურაში სწავლის დროს მეცნიერთა ბიოგრაფიული დეტალები ნაკლებად მაინტერესებდა. რაც

პროფ. მუსხელიშვილის შესახებ ვიცოდი, იყო ის, რომ მან გამოაქვეყნა ზემოთ აღნიშნული წიგნი და დაწერა აგრეთვე მონოგრაფია „სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები“. მაშინ, მაგალითად, არ ვიცოდი, რომ ის ფიზიკისა და მათემატიკის სტუდენტი და შემდგომ ასპირანტი იყო სანკტ პეტერბურგის უნივერსიტეტში, სადაც მან 1934 წელს ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხი მიიღო. შემდგომ, ასაკთან ერთად იზრდებოდა ჩემი დაინტერესებაც მუსხელიშვილის ბიოგრაფიით. მე ყოველთვის აღტაცებას მგვრიდა მისი მაღალი თანამდებობები: თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი 1922 წლიდან გარდაცვალებამდე (1976 წ.), საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი 1941 წლიდან გარდაცვალებამდე, დაბოლოს, აკადემიის პრეზიდენტი 1941-1972 წლებში.

სიამოვნებას მანიჭებს დიდი ქართველი მეცნიერის — მუსხელიშვილის ბიოგრაფიის დეტალების გახსენება საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ბიულეტენში. ქართველ მკითხველს კმაყოფილებას მოჰგვრის გაიხსენოს მუსხელიშვილი, როგორც მრავალი მაღალი რეპუტაციის უცხოური სამეცნიერო აკადემიის წევრი, მნიშვნელოვანი ჯილდოების კავალერი, საზოგადო მოღვაწე, რაც ჩემი, როგორც ავსტრიის მეცნიერებათა აკადემიის ყოფილი გენერალური მდივნისა და პრეზიდენტის აზრით, რომელიც იცნობს მკვლევართა, მათ შორის, თანამემამულეთა მრავალ ბიოგრაფიას, დიდად მნიშვნელოვანი და შთამბეჭდავია.

ვენის უნივერსიტეტის დოქტორანტურაში სწავლის დროს მუსხელიშვილის მეთოდი იყო ერთადერთი პერსპექტიული ანალიტიკური ხერხი სწორკუთხა ტრაპეციის ფორმის ფირფიტის ძვრებისა და დაძაბულობების განსასაზღვრავად. ოცდახუთი წლის შემდეგ გამოცემულ ჩემი წიგნის იმ თავში, რომელიც ფირფიტებსა და ხვრელებს ეხებოდა, და წარმოადგენდა ლექციების კურსს ვენის უნივერსიტეტისათვის, მუსხელიშვილის მეთოდი გამოიყენება ბრტყელი ფილების ყველაზე რთული ამოცანების ამოსახსნელად.

მაშინ, როდესაც ჩემს სადოქტორო დისერტაციას ვწერდი, სასრულ ელემენტთა მეთოდი ავსტრიის უნივერსიტეტებში ჯერ კიდევ არ ისწავლებოდა. სულ მალე, რაც დოქტორანტურა დავასრულე, გავაცნობიერე ამ მძლავრი გამოთვლითი მეთოდის შესწავლის აუცილებლობა, რომელმაც ელექტრონულ-გამოთვლითი მანქანის გამოყენებით, სხვა მრავალს შორის, სტრუქტურულ ანალიზში ძირეული ცვლილებები შეიტანა. მას შემდეგ, რაც ფილოსოფიის დოქტორის ხარისხის მისაღებად აშშ-ში დისერტაცია დავიცავი ორმაგად გოფრირებული გარსების ანალიზის შესახებ სასრულ ელემენტთა მეთოდით, მე ვთვლი რომ ამ რიცხვითი მეთოდის შთამბეჭდავ მრავალმხრივობასა და მაღალ ეფექტურობას, რომელიც დომინირებს ჩემს სამეცნიერო მოღვაწეობაში, მნიშვნელოვნად აწონასწორებს მუსხელიშვილის ანალიზური მეთოდის მათემატიკური სილამაზე.

დასკვნა. „პირველითგან იყო მუსხელიშვილი“. პროფესორ ნიკოლოზ ივანეს ძე მუსხელიშვილის მეცნიერული ხატება გასული საუკუნის 60-იანი წლების ბოლოს ჩემი სამეცნიერო კარიერის დასაწყისიდანვე მდევს. მისი უდიდესი შრომები მათემატიკასა და მექანიკაში დღემდე მაჯადოებენ თავიანთი ბრწყინვალებით. დიდი ქართველი მათემატიკოსის მუსხელიშვილისადმი ღრმა პატივისცემის გრძნობაზე ჩემს ძლიერ გატაცებას გამოთვლითი მექანიკით, და კერძოდ, სასრულ ელემენტთა მეთოდით, გავლენა არ მოუხდენია. ამ სტატიით მინდა ამ ადამიანს დაგვიანებული პატივი მივაგო.

როცა ძველ, ორმოცი წლის წინანდელ შრომებს ვიხსენებ მყარი ტანის მექანიკაში, მახსენდება ჯონ ფ.კენედის სიტყვები, რომლებიც მან იელის უნივერსიტეტში წარმოთქვა საპატიო დოქტორის წოდების მინიჭებისას: „მე ორივე სამყაროში გამარჯვებული ვარ. მივიღე ჰარვარდის განათლება და იელის ხარისხი“.

თავს უფლებას მივცემ ეს ავტობიოგრაფიული მომენტი საკუთარ თავზე ავსახო. მეც, თუმცა გარკვეული განსხვავებით, ორ სამყაროში მივაღწიე სიმაღლეებს – ძველ და ახალ სამყაროებში: ავსტრიაში მივიღე ტექნიკის დოქტორის ხარისხი, რის მოსაპოვებლად დისერტაცია დავიცავი მუსხელიშვილის ფუნდამენტური შრომის საფუძველზე, და ამერიკაში ფილოსოფიის დოქტორის ხარისხი მოვიპოვე სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენებით.

REFERENCES

1. *H. Mang*. Über die Berechnung von Trapezplatten mit rechten Winkeln mit Hilfe der Methode von Mus'chelischwili. [On the Analysis of Trapezium-shaped Plates with Right Angles by Means of Muskhelishvili's Method.] Dr. techn. Dissertation, Vienna University of Technology, 1969 (German).
2. *N.I. Muskhelishvili*. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff, Groningen, 1963.
3. *N.I. Muskhelishvili*. Singular Integral Equations. P. Noordhoff, Groningen, 1953.
4. *H. Mang*. Flachentragwerke. [Plate and Shell Structures.] In: Der Ingenieurbau (G. Mehlhorn, Ed.), Volume 6 (Rechnerorientierte Baumechanik), p. 1-139, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1995 (German).
5. *H. Mang*. Analysis of Doubly Corrugated Shell Structures by the Finite Element Method. Ph D Dissertation, Texas Tech. University, Lubbock, 1974.
6. *R. Bareš.* Berechnungstafeln für Platten und Wandscheiben - Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms. Based on the Elastic Theory. Bauverlag, Wiesbaden und Berlin, 1969 (German and English).
7. *W. von Koppenfels, F. Stallmann.* Praxis der konformen Abbildung. [Practice of Conformal Mapping.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 100, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959 (German).
8. *B.R. Seth.* Bending of Clamped Rectilinear Plates. Philosophical Magazine **38**, 7, 292-301, 1947.

Received January, 2007