საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე, 175, №1, 2007
BULLETIN OF THE GEORGIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, 175, №1, 2007

*Informatics*

# The Multicriterial Optimization Problem, Methods and Algorithms of Decision

**Mindia E. Salukvadze**

*Academy Member, A. Eliashvili Institute of Control Systems, Tbilisi*

**ABSTRACT. The general multicriterial optimization problem is presented. The numerical algorithm of the decision-making person's search for the problem's compromise solution has been studied.** *© 2007 Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*

***Key words:*** *optimization, multicriterial problem, Pareto-optimal solution, Pareto set, compromise solution, decision-making person.*

New informational technologies based on the use of the mathematical modeling and optimization are an important factor for improving the process of the analysis of possible solutions in the problems of complex systems designing and their activity planning.

One of the problems arising when developing the methods of solving similar problems is multicriteriality. Multicriterial optimization problems (MO) arise frequently when solving many practical problems. One of such problems, for example, is the problem of the effective service of ecologically hazardous facilities aimed at minimization of the risk during their abnormal functioning. Abnormal functioning implies the facility's operating conditions, at which the technological process is attended with the emission of ecologically harmful substances in inadmissible doses, or the facility's operating conditions leading to its emergency condition. A vivid example of such a facility is a nuclear power plant (NPP).

The problem of the NPP normal functioning can be formulated as multicriterial dynamic problems of optimal control, taking into account random factors and characteristics of a technological process, but the obtained models, as a rule, are complicated for numerical realizations. For that reason the problem of the NPP normal functioning is replaced by a less complex problem, e.g. by the problem of the efficient maintenance of the NPP protection system (PS), in which the PS is described by probabilistic models with various degrees of adequacy to reality.

The problem of multicriterial optimization (MO) in general case is as follows:

$$\min_{x \subset \Omega} f(x),$$

$$\Omega = \left\{ x \subset R^n \,\middle|\, g_j(x) \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,m \right\}. \tag{1}$$

Here $f(x)$ is a vector function. Its components $f_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,k$, and also $g_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,m$, are given functions; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ is a sought vector of the problem variables (1).

© 2007 Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.

The multicriterial problem statement comprises two constituents - the set of possible solutions $\Omega$, and the vector criterion $f$ given on the set $\Omega$. It is considered that for any possible solution $x$ the corresponding vector estimate ($k$-dimensional vector) $y = f(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\dots,f_k(x))$ can be calculated.

A certain person chooses the best solution from a set of possible solutions, and he/she is fully responsible for this decision. That person is called a decision-making person (DMP). A single person or a whole collective aspiring to reach a certain aim can be DMP.

Let us consider that DMP is interested in getting the possibly smallest value by each of the existing criteria $f_1,\ f_2,\dots,f_k$. In such case the best (ideal) solution for DMP will be the solution, which minimizes simultaneously all noted criteria on the set $\Omega$. Unfortunately, such solutions practically do not actually occur in life. Usually specialists deal with problems, in which the solution being optimal by some sole criterion is not optimal by any other criterion. That means that the multicriterial problem in a general case is not reduced to one or several single-criterial problems.

Let us consider two possible solutions $x'$ and $x''$ from $\Omega$. If out of these two solutions DMP chooses the first one, that means that the solution $x'$ for DMP is more preferable than $x''$. In that case we write $x' \succ x''$. The symbol $\succ$ denotes the DMP preferences, and is called a preference ratio. To each DMP corresponds his (her) personal preference ratio.

Any decision-making problem is connected with some concrete DMP. Therefore, any multicriterial problem statement, except for the noted set of possible solutions $\Omega$ and the vector criterion $f$, includes one more preference ratio $\succ$ of the given DMP. The very problem consists in the choice of such (may be not a sole) solution among possible solutions, which would be the most preferable for DMP taking into account all existing optimality criteria making the vector criterion $f$. Denote by $Opt_{\succ}\Omega$ the sought set (it can also consist of one element) of the most preferable (optimal) for DMP solutions. So, the multicriterial problem consists in finding the set $Opt_{\succ}\Omega$ on the basis of the vector - criterion $f$.

The solution $x^* \in \Omega$ is effective or Pareto-optimal, if there does not exist any other solution $x \in \Omega$, such that $f_i(x) \le f_i(x^*)$, $\forall i = 1,2,\dots,k$, and at least one of the inequalities is strict. The whole complex of efficient solutions $x^*$ makes a Pareto set, the structure and the properties of which are thoroughly investigated in the literature [1-3].

Denote a set of all Pareto-optimal solutions (Pareto set) by $P_f(\Omega)$. By now the methods and the algorithms constructing such a set have been developed, and all specialists in the field of decision-making unanimously consider that the best multicriterial problem solution is to be searched for just in the Pareto set: $Opt_{\succ}\Omega \subset P_f(\Omega)$.

Thus, the definition of the Pareto-optimal domain is considered the first natural step for choosing the optimal solution in the MO problems.

The next statement is a fundamental theorem for constructing a numerical algorithm for defining the Pareto set.

**Theorem1.** *Let the set $\Omega$ be convex, and all components $f_1, f_2,\cdots,f_k$ of the vector-function $f$ are concave on the set $\Omega$. In order the expression $x^* \in \Omega$ to be Pareto-optimal, the numbers $\lambda_i \ge 0$, $i = 1,2,\dots,k$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$ are necessary to exist, such that*

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x^*) = \min_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x). \qquad (2)$$

Therefore in the MO problems, in which the requirement of convexity (concavity) of partial criteria $f_1, f_2,\dots,f_k$ is fulfilled, we can get the domain of the Pareto-optimal solutions by the following computing circuit:

**Step 1.** Random selection of the values $\xi_i \ge 0$, $i = 1,2,\dots,k$, satisfying the condition $\sum_{i=1}^{k}\xi_i = 1$ is carried out;

**Step 2.** Coefficients are computed by the formula:

$$\lambda_i = \xi_i / (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k),\quad i = 1,2,\dots,k;$$

**Step 3.** The following problem of scalar optimization is solved

$$\min\left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) \middle| x \in \Omega \subset R^n \right\}$$

and thereby a single compromise solution of the initial MO problem is found.

**Step 4.** The multiple fulfillment of the above indicated procedures allows to construct a set of Pareto-optimal solutions.

In the theorem given below, unlike the theorem 1, there are no suppositions on the convexity of the set $\Omega$, and concavity of the components of the vector-function *f*. Therefore, it can be used when solving a wide class of multicriterial problems.

**Theorem 2**. *Suppose that* $x^* \in \Omega$, *and* $f(x^*) > 0_k$. *In order the solution* $x^* \in \Omega$ *to be Pareto-optimal, such numbers as* $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *are necessary to exist, so that*

$$\max_{i=1,2,\ldots,k} \{\lambda_i f_i(x^*)\} = \min_{x \in \Omega} \max_{i=1,2,\ldots,k} \{\lambda_i f_i(x)\} \tag{3}$$

*could take place.*

Therefore, in the absence of the suppositions of the convexity (concavity) of the set $\Omega$, and partial criteria $f_1, f_2, \ldots, f_k$ in the MO problems, the Pareto-optimal solution domain can be constructed by the following scheme:

**Step 1.** The random selection of the values $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, satisfying the condition $\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1$ is carried out;

**Step 2.** Coefficients are computed by the formula:

$$\lambda_i = \xi_i / (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k), \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

**Step 3.** Values of the vector components $f(x)$ are computed:

$$y_i(x) = \lambda_i f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

**Step 4.** Among **vector** components $f(x)$ the component with maximal value is selected:

$$\tilde{y}(x) = \max_{i=1,2,\ldots,k} \{y_i(x)\};$$

**Step 5.** The following minimization problem is solved

$$\min_{x \in \Omega} \left\{ \tilde{y}(x) \middle| x \in \Omega \subset R^n \right\}$$

and one compromise solution of the initial MO problem is found.

**Step 6.** Multiple fulfillment of the above noted procedures allows constructing a set of Pareto-optimal solutions.

The cited theorems show that with certain assumptions, the selecting coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, any Pareto-optimal solution can be obtained as a result of solving a corresponding single-criterial optimization problem.

Common examples show that a non-empty set of Pareto-optimal solutions can represent any subset of a set of possible solutions (including only one solution, or $P_f(\Omega) = \Omega$). The narrower the Pareto set is, the easier is the consequent finding of the set $Opt_{\succ}\Omega$. But practice shows that in real problems the Pareto set is sufficiently wide, and its construction does not completely solve the decision-making problem. Exactly which Pareto-optimal solutions make the set $Opt_{\succ}\Omega$ is probably the most difficult question to be encountered with in solving any concrete multicriterial problem. In response to that question, as a rule, we have to use some supplementary information about the DMP preference ratio.

Since a person describing the system as MO model can also have some supplementary information unconsidered by the model (1) about the problem (proceeding, for example, from its physical sense) most of the methods solving MO problems are oriented to the use of the existing supplementary information. It can be used at the beginning, in the course of solving, and at the end of the decision-making process.

Recently, the so-called interactive procedures, meaning a dialog of a user-computer type, i.e. a dialog between a decision-making person (DMP) and a computer have been more intensively developing. That should be carried out for the purpose of the step-by-step specification of the solution, taking into account the whole volume of the obtained information.

Proceeding from the above-mentioned, we consider it important to note that when choosing different methods for solving MO problems the user should have an exact idea on the compliance of his/her supplementary information with the demand made by different algorithms of MO problem solution.

The methods of MO problem solution, classified in compliance with the type of the information used, are considered in [4].

We can single out the following classes of the methods of solving MO problems:

1. Methods not using supplementary information concerning the problem (1);
2. Methods using information about the relative importance of criteria;
3. Methods using goal values of criteria;
4. Methods using information about admissible intervals or lower limits of criteria changes;
5. Methods using combined forms of different types of information about criteria.

**Methods not using supplementary information.** In some cases the user may not have quite clear information about the criteria of the problem set by him: it is natural that in such case the most acceptable for him is the choice of the algorithm from the class of methods not using supplementary information about the model (1). The methods of that category are grounded on the assumption about the existence of the so-called "optimal" solution of the MO problem, which can be found by the transformation of the vector optimization problem in the corresponding scalarized problem. Such methods are, for example, the method of ideal distance [1], the method of goal achievement [5], the principle of maximal efficiency [6], et al.

Let us consider in detail the method of ideal distance having a number of positive properties. The method is destined, firstly, for solving both linear and non-linear vector problems. Secondly, it most vividly demonstrates the presence of the assumption for the "optimal" solution existence, and thereby the user more easily apprehends it. And, thirdly, it is quite convenient from the computing viewpoint.

For the simplicity of the statement let us consider a linear case, i.e. the case when every criterion function $f_i(x)$ of the model (1) is a linear form

$$f_i(x) = \sum_{S=1}^{n} c_{iS} x_S \,, \quad i = 1, 2, ..., k \,.$$

The limitations system forming a domain $\Omega$ in the model (1) also implies linear functions.

For the problem (1) we find the optimal solution separately for each criterion, i.e. $k$ of the single-criteria problems of the following type is solved:

$$\min_{x \in \Omega} \; f_i(x) \,, \quad i = 1, 2, ..., k \,.$$

Let the corresponding optimal solution of each of the single-criterion problem be the point $x^{i0}$ ( $i = 1, 2, ..., k$ ). On these points we determine the criteria values $f_i^0 = f_i(x^{i0})$, $i = 1, 2, ..., k$, correspondingly.

Consider the vector $\bar{f}(x)$ with the components $\dfrac{f_i(x)}{f_i^0}$ and make square of the Euclidean standard

$$R(x) = \| \bar{f}(x) - \bar{f}^0 \|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[ \sum_{S=1}^{n} \frac{c_{iS}}{f_i^0} x_S - 1 \right]^2 . \tag{4}$$

Now the problem is reduced to the minimization of the function $R(x)$ on the set $\Omega$. The obtained solution is taken as the problem solution (1), since it is one of the points of the Pareto boundary.

Note that the solution found will be such that the maximal proximity of the value of each *i*-criterion to the corresponding $f_i^0$ is provided.

In the general non-linear case instead of (4) we have:

$$R(x)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i(x)}{f_i^0}-1\right)^2,$$

where $f_i^0$ is the minimum value of the function $f_i(x)$ on $\Omega$.

Usually, in the traditional statements non-emptiness of the admissible set of the solutions $\Omega$ is supposed. At the same time, in practice, the solution when $\Omega=\varnothing$ is quite usual. For that case the procedure analyzing the statement, and the improper multicriterial problems solution of mathematical programming [7] based on the theory of single-criteria improper problems and the method of ideal distance have been developed.

In conclusion I would like to point out that the reader might get interested in paper [8], in which we solve the multicriterial problem of the effective service of the NPP protection system aimed at the minimization of risk during its emergency functioning, and in paper [9] where we consider the problem of the construction of a reliable NPP protection system with minimal expenditures.

*ინფორმატიკა*

# მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანა, მისი ამოხსნის მეთოდები და ალგორითმები

**მ. სალუქვაძე**

*აკადემიის წევრი, ა. ელიაშვილის მართვის სისტემების ინსტიტუტი, თბილისი*

როგორც ცნობილია, მათემატიკურ მოდელირებასა და ოპტიმიზაციაზე დაფუძნებული ახალი ინფორმაციული ტექნოლოგიები უმნიშვნელოვანეს ფაქტორს წარმოადგენს რთული სისტემების პროექტირებისა და მათი განხორციელების დაგეგმარების ამოცანების შესაძლებელი გადაწყვეტის ანალიზის პროცესში. ამგვარი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შემუშავებისას ერთ-ერთ ყველაზე სერიოზულ პრობლემას წარმოადგენს სისტემის მრავალკრიტერიულობა. ასე რომ, მრავალი პრაქტიკული პრობლემის გადაწყვეტისას ძალიან ხშირად საქმე გვაქვს მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნასთან. ერთ-ერთ ასეთ პრობლემად, მაგალითად, შეიძლება დავასახელოთ ეკოლოგიურად საშიში ობიექტის ეფექტური მომსახურების ამოცანა მისი არანორმალური ფუნქციონირების რისკის მინიმიზაციის მიზნით.

ნაშრომში განხილულია მრავალკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანა:

$$\min_{x\subset\Omega} f(x),\quad \Omega=\left\{x\subset R^n \,\middle|\, g_j(x)\ge 0,\ j=1,2,\ldots,m\right\}.$$

ამოცანის დასმა ფაქტობრივად შეიცავს ორ ძირითად ნაწილს: შესაძლებელი ამოხსნების არეს $\Omega$ და ვექტორულ კრიტერიუმს $f$.

დასაშვებ არეში საუკეთესო ამოხსნის მოძებნას აწარმოებს სუბიექტი (ამოხსნის ამრჩევი პირი), ან სუბიექტთა ჯგუფი.

დავუშვათ, პირი დაინტერესებულია, რომ ყველა $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა იყოს მინიმალური, ე. ი. აირჩიოს ისეთი $x \subset \Omega$, რომ ყველა კრიტერიუმი ერთდროულად იყოს მინიმალური, ეს იდეალური შემთხვევაა. სამწუხაროდ, ეს ძალზე იშვიათად ხდება, სინამდვილეში ასეთი $x \subset \Omega$ არ არსებობს.

ამონახსნის ამრჩევმა პირმა უნდა გამოიყენოს დამატებითი ინფორმაცია და დაკმაყოფილდეს კომპრომისული ამონახსნით. პირველ რიგში მას შემოაქვს უპირატესობის ცნება, ორი ამონახსნიდან რომელს ანიჭებს უპირატესობას. ხელმძღვანელობს ამონახსნის ეფექტურობის (პარეტო-ოპტიმალურობის) ცნებით.

ამონახსნი $x^* \in \Omega$ არის ეფექტური (პარეტო-ოპტიმალური), თუ $\Omega$ სივრცეში არ არსებობს სხვა რომელიმე ამონახსნი $x \in \Omega$, რომლის დროსაც ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $f_i(x) \le f_i(x^*), \forall i = 1,\ldots,k,$ ამავე დროს, ერთი რომელიმე ინდექსისათვის ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას.

ეფექტურ ამონახსნთა ერთობლიობა წარმოადგენს პარეტო-სიმრავლეს. საუკეთესო კომპრომისული ამონახსნი უნდა ვეძიოთ პარეტო-სიმრავლეში.

პარეტო-ამონახსნის მოძიებისათვის გამოიყენება შემდეგი დებულება:

დავუშვათ, $\Omega$ სივრცე ამოზნექილია და ამ სივრცეზე $f$ ვექტორ-ფუნქციის კომპონენტები ჩაზნექილია. იმისათვის, რომ ამონახსნი $x^* \in \Omega$ იყოს პარეტო-ოპტიმალური, აუცილებელია ისეთი არაუარყოფითი $\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_k$ რიცხვების არსებობა, რომელთა ჯამი ერთის ტოლია და რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობას:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x^*) = \min_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) .$$

ამრიგად, ვღებულობთ შემდეგ გამოთვლით სქემას:

ბიჯი 1. შემთხვევითი რიცხვების $\xi_i \ge 0$ , $i = 1,2,\ldots,k$ , $\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1$ ამორჩევა;

ბიჯი 2. შესაბამისი კოეფიციენტების გამოთვლა $\lambda_i = \xi_i / \left(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k\right)$;

ბიჯი 3. სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის

$$\min\left\{ f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i\left(x\right) \middle| x \in \Omega \subset R^n \right\}$$

ამოხსნა და ერთ-ერთი კომპრომისული ამონახსნის მოძიება;

ბიჯი 4. ამ პროცედურების მრავალჯერადი ჩატარებით ვაგებთ პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნთა სიმრავლეს.

როდესაც ზემოთ მოყვანილი ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა არ სრულდება, მაშინ, რა თქმა უნდა, პროცედურა რთულდება, მაგრამ თითქმის ანალოგიურად სრულდება პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნების სივრცის აგება.

მიღებული პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნების სივრციდან კომპრომისული ამონახსნების მოძებნისათვის არსებობს მრავალი მეთოდი:

1. მეთოდები, რომლებშიც არ გამოიყენება დამატებითი ინფორმაცია დასმული ამოცანის შესახებ;
2. მეთოდები, რომლებშიც გამოიყენება კრიტერიუმთა უკეთესობა სხვათა მიმართ;
3. მეთოდები, რომლებშიც გამოიყენება კრიტერიუმთა მიზნობრივი მნიშვნელობები;
4. მეთოდები, რომლებშიც გამოიყენება ინფორმაცია დასაშვები ინტერვალების ან კრიტერიუმთა ქვედა ზღვრების შესახებ;
5. მეთოდები, რომლებშიც გამოიყენება კრიტერიუმთა შესახებ სხვადასხვა ტიპის ინფორმაციის კომბინირებული ფორმები.

გავრცელებული მეთოდებიდან ხშირად გამოიყენება პირველ კლასს მიკუთვნებული „იდეალური მანძილის“ მეთოდი, რომელსაც რიგი დადებითი თვისებები გააჩნია: იგი გამოიყენება როგორც წრფივი, ისე არაწრფივი ამოცანების გადაწყვეტისათვის; ყველაზე ცხადად ადასტურებს „ოპტიმალური“ ამონახსნის არსებობას, რის გამოც ძალზე იოლად აღიქმება მომხმარებლის მიერ; ყველაზე უფრო მოსახერხებელია გამოთვლების თვალსაზრისით.

ამ მეთოდის მიხედვით კომპრომისული ამონახსნის ძიება დაიყვანება სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანაზე

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{f_i(x)}{f_i^0} - 1\right)^2.$$

აქ $f_i^0$ არის $f_i(x)$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა $\Omega$ არეზე.

## REFERENCES


1. *M.E. Salukvadze*. Vector-valued Optimization Problems in Control Theory, New York: Academic Press, 219 pp., 1979.
2. *R.E. Steuer*. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application, New York, John Wiley and Sons, 550 p., 1986.
3. *V.V. Podinovskiy, V.D.Nogin*. Pareto-optimalnye resheniya mnogokriterial'nykh zadach, M., 256 pp., 1982 (Russian).
4. *N. Kilasonia, M. Salukvadze, A. Topchishvili*. Proceedings of the A.I.Eliashvili Institute of Control Systems of the Georgian Academy of Sciences, 18 pp., 1990 (Russian).
5. *N.O. Da Cunha, E. Polak*. J. Math. Anal. Appl., **19**, 1967.
6. *V.V. Khomeniuk*. Elements of the theory of multigoal optimization, M., Nauka, 124 p., 1983 **(**Russian).
7. *M. Salukvadze, A. Topchishvili*. JOTA, **61**, No.3, 487-491, 1989.
8. *M. Salukvadze, N. Marianovich, P. Knopov, A. Golodnikov, N. Jibladze, V. Maisuradze*. Proceedings of the A.I.Eliashvili Institute of Control Systems of the Georgian Academy of Sciences, 7, 11-16, 2003 (Russian).
9. *M. Salukvadze, N. Jibladze, V. Maisuradze, L. Gachechiladze*. Proceedings of the A.I.Eliashvili Institute of Control Systems of the Georgian Academy of Sciences, 7, 17-20, 2003 (Russian).


*Received February, 2007*