საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე, ტ. 7, №3, 2013
BULLETIN OF THE GEORGIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, vol. 7, no. 3, 2013

Mathematics

Note on Abel-Poisson Means of Trigonometric Fourier Series

Dali Makharadze

Faculty of Education and Sciences, Shota Rustaveli State University, Batumi

(Presented by Academy Member Vakhtang Kokilashvili)

ABSTRACT. Some approximative properties of the Abel-Poisson means of trigonometric Fourier series are established. For summable functions we establish the order of deviation at certain points by above-mentioned summation means. We prove that at points, in which the indefinite integral of modulus of second order difference is estimated by the product of modulus continuity function and upper bounds of indefinite integral, it is possible to get optimal estimate. In the paper alongside with the pointwise estimate the uniform summation order is established. *© 2013 Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*

Key words: *Abel-Poisson means, trigonometric Fourier series.*

Let us assume that $T=[-\pi,\pi]$ and the functions $f: R\to R$ are periodic with period 2π, where $R=]-\infty;\infty[$. For a function $f\in L(T)$ by $\sigma[f]$ denote the trigonometric Fourier series of f, i.e.,

$$\sigma[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

where

$$a_k\equiv a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\cos kt\,dt,$$

$$b_k\equiv b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\sin kt\,dt.$$

By $f(x,r)$ denote Abel-Poisson means of the series $\sigma[f]$, namely:

$$f(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_T f(x+t)P(r,t)dt,\ 0\le r<1, \tag{1}$$

where

$$P(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2},\ 0\le r<1. \tag{2}$$

As is known (see e.g. [1]),

$$P(r,t)>0,\ t\in T. \tag{3}$$

$$P(r,t)<A\,\frac{1-r}{(1-r)^2+t^2},\ t\in T. \tag{4}$$

Denote by Φ the class of all functions $\omega:[0,\pi]\to R$ with the properties:

1. ω is continuous on $[0,\pi]$;
2. ω is increasing;
3. $\omega(0)=0$;
4. $\omega(t)>0$, $0<t\le\pi$.

Below $A(f)$, $A(f,\eta)$,... are positive constants depending only on the indicated parameters.

Denote $\varphi(x,t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

Theorem 1. *Let* $f\in L(T)$, $\omega\in\Phi$ *and* $0\le r<1$. *If for a point* $x\in T$

$$\int_0^t|\varphi(x,s)|ds\le A(f,x)t\omega(t),\ 0<t\le\eta\le\pi, \tag{5}$$

then

$$|f(x,r)-f(x)|\le \mathrm{A}(f,x,\eta)\,(1-r)\int_{1-r}^{\eta}\frac{\omega(t)}{t^2}dt,\qquad r\ge r_0(\eta). \tag{6}$$

Proof. Taking into account equality (2), we write

$$\frac{1}{\pi}\int_T P(r,t)dt=1,\qquad 0\le r<1.$$

Therefore,

$$f(x,r)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,t)P(r,t)dt\ \frac{1}{\pi}\int_0^{1-r}\varphi(x,t)P(r,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{1-r}^{\eta}\varphi(x,t)P(r,t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\varphi(x,t)P(r,t)dt\equiv\sum_{j=1}^{3}M_j(f,x,r,\eta). \tag{7}$$

In view of relations (2),(4),(5) and by virtue of (7), we have

$$|M_1(f,x,r)|\le\frac{A}{1-r}\int_0^{1-r}|\varphi(x,t)|dt\le A(f,x)\omega(1-r). \tag{8}$$

Taking into account (4), we obtain

$$\left|M_2\left(f,x,r,\eta\right)\right| \le A\left(1-r\right) \int_{1-r}^{\eta} \frac{\left|\varphi\left(x,t\right)\right|}{t^2} dt.$$

If we apply the formula of integration by parts, then we obtain

$$\left|M_2\left(f,x,r,\eta\right)\right| \le A\left[\left|\left(1-r\right)\left[\int_0^t \left|\varphi\left(x,s\right)\right| ds \frac{1}{t^2}\right]_{1-r}^{\eta}\right| + 2\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\eta}\left[\int_0^t \left|\varphi\left(x,s\right)\right| ds\right]\frac{dt}{t^3}\right].$$

Therefore, by virtue of condition (5), we can write

$$\left|M_2\left(f,x,r,\eta\right)\right| \le A\left(f,x\right)\omega\left(1-r\right) + A\left(f,x,\eta\right)\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\eta}\frac{\omega\left(t\right)}{t^2}dt \le$$

$$\le A\left(f,x,\eta\right)\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\eta}\frac{\omega\left(t\right)}{t^2}dt. \tag{9}$$

If we use relation (4), then from equality (7) we conclude that

$$\left|M_3\left(f,x,r,\eta\right)\right| \le A\left(f,x,\eta\right)\left(1-r\right) \le A\left(f,x,\eta\right)\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\eta}\frac{\omega\left(t\right)}{t^2}dt. \tag{10}$$

Taking into account relations (7), (8), (9) and (10), we obtain (6). Thus, theorem 1 is proved.

From Theorem 1 it follows

Theorem 2. *Let* $f \in L(T)$, $\omega \in \Phi$, $\left[a,b\right] \subset T$, $b-a>0$ *and*

$$\sup_{a\le x\le b}\int_0^t \left|\varphi\left(x,s\right)\right| ds \le A\left(f\right)t\omega\left(t\right),\ 0<t\le\eta\le\pi\ ,$$

then

$$\sup_{a\le x\le b}\left|f(x,r)-f(x)\right| \le \mathrm{A}\left(f,\eta\right)\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\eta}\frac{\omega\left(t\right)}{t^2}dt, \qquad r\ge r_0\left(\eta\right). \tag{11}$$

If $T=\left[a,b\right]$, *then from equality* (11) *we obtain*

$$\left\|f(\cdot\,,r)-f(\cdot)\right\|_c \le A\left(f\right)\left(1-r\right)\int_{1-r}^{\pi}\frac{\omega\left(t\right)}{t^2}dt,\ r\ge r_0.$$

From this inequality it is possible to receive the corresponding result of Natanson [2].

მათემატიკა

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების აბელ-პუასონის საშუალოების შესახებ

დ. მახარაძე

შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, განათლებისა და მეცნიერებათა ფაკულტეტი, ბათუმი

(წარმოდგენილია აკადემიკოს ვ. კოკილაშვილის მიერ)

ნაშრომში დადგენილია $f \in L(T)$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების აბელ-პუასონის საშუალოების აპროქსიმატული თვისებები წერტილში და $[a, b] \subset T$ სეგმენტისთვისაც. დადგენილია აღნიშნული საშუალოებით ჯამებადი ფუნქციიდან გადახრის რიგი გარკვეულ წერტილებში. ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ იმ წერტილებში, სადაც ფუნქციის მეორე რიგის სხვაობის მოდულის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ბიჯის მიმართ ფასდება უწყვეტობის მოდულის ტიპის ფუნქციისა და ინტეგრალის ზედა საზღვრის ცვლადის ნამრავლით, ხერხდება ზემოაღნიშნული გადახრის ოპტიმალური შეფასება. ამასთან ერთად ჩვენ ვადგენთ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების პუასონის საშუალოებით თანაბარი გადახრის რიგს პერიოდის ქვესეგმენტებზე.

REFERENCES:

1. *A. Zygmund*, (1959), Trigonometric Series, Vol. I, Cambridge.
2. *I.P. Natanson* (1950), DAN SSSR. **73**, 2: 273-276.

Received July, 2013